《学术界》(月刊)
总第 249 期,2019.2
ACADEMICS
No.2 Feb. 2019

维特根斯坦论数学基础〔*〕

徐　弢

(湖北大学　哲学学院,湖北　武汉　430062)

〔摘　要〕维特根斯坦认为 20 世纪初出现的数学基础三大流派之间的不同争论,实际上都是源于对数学基础问题的认识论思考的混淆,即他们没有从语言句法角度对数学基础问题做出真正的澄清。维特根斯坦认为数学本质上并不需要任何基础,无论逻辑还是元数学都不能成为数学的基础。数学是由计算构成的自为的系统,不同的系统之间具有不同的句法规则,数学命题是一种语法规则表述,具有规范性的地位,这种规范性既不来自于逻辑公理,也不是来自于无矛盾证明或人类心灵的直觉力量,而最终在于人类的生活实践之中。

〔关键词〕维特根斯坦;数学基础;逻辑主义;元数学;直觉主义;语法规则

DOI:10.3969/j.issn.1002-1698.2019.02.008

为了应对 20 世纪之初的数学基础危机,数学家们通过对数学基础问题的研究,形成了三大流派来试图化解这场危机,弗雷格-罗素的逻辑主义试图将数学还原为逻辑,认为作为数学基础的数本身需要重新进行定义;以希尔伯特为代表的元数学认为有必要通过公理化方式对数学公理进行严格的无矛盾证明,以消除隐藏的矛盾;而直觉主义则认为人类的心灵的基本直觉可以解释所有数的产生。三大流派之间互相争论不休。维特根斯坦在批判地考察不同数学家工作的基础上,形成了自己独特的数学哲学思想。在维特根斯坦看来,三大派关于数学基础问题的观点都充满了许多认识论的混淆,在数学基础问题上需要的是逻辑语法的澄清,而不是各种认识论的理论建构。

一、形式与概念:逻辑不是数学的基础

维特根斯坦认为弗雷格-罗素的逻辑主义中存在严重的混淆,弗雷格-罗素认为数学的基础在于逻辑,极力主张将数学特别是算术还原为逻辑。但是,他们都没有追问:数学需要逻辑作为其基础么?对此,维特根斯坦认为回答是否定的。他说:“逻辑也不是元数学(Metamathematik);也就是说,通过逻辑计算的工作也不可能阐

作者简介:徐弢,哲学博士,湖北大学哲学学院暨中华文化发展湖北省协同创新中心副教授,硕士生导师,研究方向为语言哲学、数学哲学、维特根斯坦哲学、文化发展研究等。

〔*〕本文系 2016 年国家社科基金一般项目“维特根斯坦数学哲学研究”(项目批准号 16BZX072)阶段性成果并受到湖北大学哲学学院“双一流”学科建设经费资助。

明数学的基本真理。……(通过罗素,但是特别是通过怀特海,一种伪精确性进入了哲学,它是实际精确性的最坏的敌人。在这里,这种错误的根源在于:一种计算可能是数学的数学的基础。)数并不是一个‘基本的数学概念’。在相当多的计算中并没有谈到数。”[1]

维特根斯坦认为,弗雷格和罗素的逻辑主义试图通过对数进行定义为数学奠基的做法,是对于数学基础问题的根本误解之一。他们以为数学的基础在于数本身,只要给出数一种新的严格的逻辑定义,就可以将一切数学公理或定理(特别是算术的基本定理)还原为逻辑。而在维特根斯坦看来,数并不是数学的最基础的概念,因为数学中还存在其他的各种不同的计算领域,其中并没有出现数。我们不能否认这些计算领域也属于数学研究范围。弗雷格和罗素之所以会坚持以上看法,主要归咎于他们没有看到数学演算是在自为的完整的体系中进行的,而这些计算根据不同的规则构成了不同系统。维特根斯坦写道:“一个系统是否以一些最初的原则为基础,或者是否最终从它发展起来,这是不同的两码事。……逻辑和数学并不以公理为基础。”[2]在维特根斯坦看来,弗雷格和罗素的逻辑主义之所以是错误的就在于他们没有对数学本身进行逻辑句法方面的研究和分析,而只是从一般的认识论的先入之见着眼,认为数学需要逻辑分析作为其基础,他们在数学基础问题上的看法充满了混淆。

另外,维特根斯坦认为,弗雷格和罗素等人试图从逻辑角度给数下定义本身也存在很多问题。弗雷格和罗素都试图从集合或类的角度重新定义数。比如,弗雷格在《算术基础》中说:“适合F这个概念的数是‘与F这个概念等数的’(gleichzahlig)这个概念的外延。”[3]弗雷格认为,为了确定数这个概念,必须借助于等数即两个集合之间的一一对应来定义,也就是说,如果F这个概念与G这个概念是等数的,那么属于F这个概念的数就与属于G这个概念的数相等。罗素在《数理哲学导论》中也表达了相同的看法,认为数本身表示的是一个类或集合。“很明显,数就是将某些集合,即那些有给定项数的结合,归结在一起的一种方法。”“所谓数就是某一个类的数。”[4]而维特根斯坦认为,弗雷格和罗素都是将数定义为一个集合或类的概念,而这种从概念角度来理解数的做法在认识论上是充满混淆的。

因为这里根本的问题则是:数是两个集合的相等概念么?对此,维特根斯坦的回答是否定的。他认为数不是概念(Begriff),而是形式(Formen)。“所有意义相同的集合具有与其他组成部分一样多的数目,这确实是正确的。但是对集合的说明并不是对数的说明。……对于数字的说明是多少,而不是说明数目相等。”[5]维特根斯坦认为,如果把数定义为集合或集合之间数目的相等的话,那么,数字3的本质就意味着像3个东西属于其中的那些性质所表明的那样的多,比如3把椅子,3只杯子等等。他认为,我们这里所遇到的问题在于,我们所谈到的并不是实际特性的外延,而是使得描述这些特性得以可能的东西。数学中数字之间的秩序是以数字的句法(syntax)为基础的,而不是以它们的实际特性为基础的。“3个组合的集合与数字3的区别就像大脑的作用与意识状态的区别一样。弗雷格–罗素的定义是错误的,因为它没有说明证实的方法(Methode der Verifikation)。”[6]

弗雷格–罗素关于数的定义先通过构建相应的集合来给数下定义这种做法实际上是倒因为果,他们在构建集合的过程中已经预设了数目的存在了,因而这里存在着循环定义之嫌。弗雷格通过两个集合外延数目相等来为数下定义的做法是将相等的概念放在数的概念之先,而相等这个概念本身则需要用数来加以说明的。比如,我有12只杯子,现在按照每个杯子来分配1个汤匙。那么,这里的分配是如何进行的呢?如果有人说,我“可以”把汤匙分配给杯子。维特根斯坦认为这里的“可以”肯定不意味着我具有把汤匙分配给杯子的物理力量,而是意味语言上的

一种可能性,因为这里的杯子和汤匙的数目正好是相等的,所以只有先有相等的概念,我才"可以"为每个杯子分配1个汤匙。"我必须事先以数的概念为前提了。不是分配(Zuordnung)决定数(Zahl),而是数使得分配成为可能。因此,人们不能通过分配来说明数字。人们不能把数字概念建立在分配的基础之上。"[7]正如有学者指出:"维特根斯坦的策略,简单地说,就是通过拒绝承认相等关系概念先于数的观念,如果后者先于前者的话,那么弗雷格分析数的相等就会涉及到循环。"[8]可见,弗雷格不能成功地为数的本质下定义。

进而,维特根斯坦总结认为弗雷格-罗素的整个逻辑都是以将概念与形式相混淆为基础的。数不是概念。人们不能普遍化地得到数。弗雷格和罗素是在错误的方向上探寻数的本质的。数字3根本不是对单个的3的组合进行普遍化而产生的东西,数字3不是3的组合的共同的特性,而是共同的形式。算术的命题并不表示普遍的规律。"数是形式。数的表达式是一个出现在命题中的图像。……数字就相当于定义所显示的东西。……数的表示方法就是描绘的方法,数在符号中显现(zeigt sich)出来。"[9]数的本质在于形式,而不是这种普遍化的概念特性。形式表示的是一种可能性(Möglichkeit),而不是现实性(Wirklichkeit)。弗雷格和罗素的关于数的定义做法就是混淆了可能性和现实性之间的区别。我们一般这样说,2+2=4意味着,"凡是有4个对象的地方,总存在着两两相加的可能性",[10]这种可能性只涉及意义,而不涉及句子的实际真实性。

二、演算与散文:元数学是不存在的

维特根斯坦还认为希尔伯特等人所主张的元数学(Metamathematik)的观念中也充满了混淆,元数学也是不可能的。早在20世纪20年代,希尔伯特就提出了他的元数学计划,主张要仔细严格地形式化数学的每个分支及其逻辑,然后去研究该形式系统以确认它们是无矛盾的。[11]希尔伯特在其著名论文"论无限"中曾经这样描述这一计划的目标。"促使我们去发现这一道路的想法以及我们想推进的目标是这些:第一,我们应该仔细地研究形成观念的方法以及那些成果丰硕的推论模型;我们应该看护它们,支持它们,使得它们有用。没有人能够把我们从康托尔(Cantor)为我们创造的乐园中赶出来。第二,我们必须像在没人质疑的初等数论中那样普遍可靠地做出各种推论,在那里,矛盾或悖论的出现仅仅是由于我们的粗心大意。"[12]希尔伯特在这一思想的指导下发展出了一整套的关于形式系统无矛盾证明的东西,以便一劳永逸地建立起对于数学演绎方法的确信。

维特根斯坦认为希尔伯特的计划背后隐藏的是诸多的认识论的混淆,这些混淆是以对数学基础问题的曲解为基础的。维特根斯坦多次强调,希尔伯特式的元数学是不可能的。维特根斯坦说:"在任何本质的意义上都不可能有元数学。"[13]他说:"不存在元数学。"[14]"字符演算(Buchstabenrechnung)系统是一种新的演算法;但是它与通常的数字演算之间的关系并不像元演算(Metakalkül)和演算(kalkül)之间的关系。字符演算不是一种理论,这是关键。……希尔伯特的'元数学'必定暴露出其伪数学(verkappte Mathematik)的原形。"[15]在维特根斯坦看来,希尔伯特所提倡的那套关于字符演算的系统并不能称为元演算或元数学,它和数学中存在的其他的演算系统一样,不过是一种新的数学演算系统而已。为此,维特根斯坦分析了希尔伯特计划提出背后所隐含的认识论的前提。

希尔伯特提出元数学这一计划的隐含的认识前提主要有:其一,为了建立对于数学以及科学确信的信心,有必要通过证明相关的形式系统(通过公理化证明)消除数学基础研究中产生的危机(由罗素等人发现的悖论所带来的)带来的担忧;其二,可以在康托尔、弗雷格、戴德金等人的集合论的基础上,重新为数学奠基,即通过无

矛盾(一致性)证明来揭露隐藏的矛盾。根据维特根斯坦的分析,希尔伯特计划的以上的认识论思考中包含着以下误解:

第一,希尔伯特出于对隐藏的矛盾的担忧,所以才强调无矛盾证明的必要性,而这在维特根斯坦看来是出于对数学本性与矛盾之间关系的本质的曲解。维特根斯坦分析了数学无矛盾问题的两个来源,其一是来自非欧几何学的观念,即非欧几何正是由于欧氏几何的第五条公理即平行公理的修正而出现的,因为数学家发现,平行公理的修正与前4条公理之间并不产生矛盾,可以推导出一个不同于欧氏几何的非欧几何,那么非欧几何和欧氏几何之间是矛盾的关系吗?维特根斯坦认为,这是两个不同的几何系统,我们根本不能谈到矛盾。因为一个在欧氏几何中的三角形的内角和是180°与一个非欧几何中三角形是181°,这里谈不上矛盾或不矛盾,只是演算规则不同而已;其二是由于担心在数学基础中出现像布拉里-福蒂(Burali-Forti)、罗素等悖论,所以希尔伯特才强调有必要对数学中形式系统进行严格的公理化的证明。维特根斯坦写道:"我读过希尔伯特关于无矛盾(Widerspruchsfreiheit)的著作。我觉得这个问题提得完全是错误的。我想问:数学根本上是否可能充满矛盾?"[16]维特根斯坦认为,希尔伯特将"$0\neq0$"或"$a\neq a$"作为典型的矛盾的做法是无意义的。因为在他看来,数学本身是各种演算(kalkül)组成的系统,这些系统本身是有序的(Ordnung)。

维特根斯坦认为,人们之所以会说数学中产生了矛盾,实际源于人们从演算中抽身出来,比如,所有的数都有这种性质,而17这个数没有这种性质,所以矛盾就这样产生了。我们有必要对数学中的隐藏的矛盾感到担忧么?维特根斯坦认为,谈论"隐藏的矛盾"(versteckte Widerspruch)这种说法根本上是无意义的,我们不需要对数学中"隐藏的矛盾"感到担忧,而需要澄清"矛盾"一词真正的用法规则。他认为:"只有当矛盾在此出现,矛盾才是矛盾。人们有一种观念,以为一开始矛盾就可能隐藏在公理中,只是人们没有看出来。如结核病,病人并没有任何预知,有一天他死了。所以,人们也以为,有一天,隐藏着的矛盾可能就冒出来了,于是灾难就降临了。"[17]维特根斯坦认为,逻辑意义上的"矛盾"只能出现于真假游戏中,矛盾的意义在于:"P. ~P"。不能谈论真和假的地方,也就谈不上矛盾。

希尔伯特主张从元数学角度对数学公理系统进行一致性证明的努力实际上根源于对隐藏的矛盾的担忧,对此,有学者指出:"维特根斯坦的策略不是去反驳希尔伯特关于一致性具体观点,而是通过表明希尔伯特的焦虑源于他对于数学真理观念的错误理解而排除这一任务。"[18]希尔伯特接受了传统的观点即在"数学事实"和"数学知识"之间做了区分,以为数学命题的目的就是为了陈述客观存在的数学事实,因此,他才会对数学命题表达的真理与数学事实之间的一致性产生了怀疑。而在维特根斯坦看来,数学命题不是陈述客观存在的数学事实,而只是一种句法规则的表达,那种以为存在客观的数学事实的观点是数学柏拉图主义[19],是完全不得要领的。

第二,对于数学中无矛盾证明的过分迷信。然而,实际上,数学基础中出现的所谓的布拉里-福蒂、罗素等各种悖论根本就与数学中的矛盾无关。以上悖论的出现是由于人们所用的语言本身出了问题,而不是在于数学演算自身。人们经常使用饱含歧义的语词刻画这些产生所谓悖论的情形。"因此,解决悖论就在于,用精确的表达式来代替含糊的表达式。所以,是通过分析(Analyse),而不是通过证明(Beweis),悖论才会消失。"[20]证明并不能消除数学中存在的矛盾,证明只能证明的东西,不可能说的更多。需要做的是分析,而不是证明。"从证实主义的观点来看,试图证明算术的一致性并不能合法地被描述为真正的数学研究。"[21]

第三,混淆了演算和散文之间的区别。维特根斯坦认为希尔伯特的元数学实际上是出于对

于演算(kalkül)和散文(Prosa)之间关系的混淆所致。维特根斯坦认为,数学完全是由演算构成的,在数学的演算中并不存在元数学的位置。元数学的计划被人们看作是对数学的系统本身提出各种的命题或理论,这是令人误导的。“一种形式的数学‘元数学语言’并不能表达关于数学的命题。”[22]元数学的语言如果离开了数学的演算,充其量只能算作散文,只能被理解为在语言层面上对于数学演算的一种新的描述。所以,维特根斯坦指出:“通过分析而被消除的东西就是在演算法中出现的名称和提示,因而也就是我想要称之为散文的东西。在演算与散文之间做出严格的区分是非常重要的。一旦人们明确了这一区分,所有诸如无矛盾性、独立性等等的问题也就烟消云散了。”[23]最终,在维特根斯坦眼中,“希尔伯特所说的是数学,而不是元数学。这是一种新的演算,它恰如另一种演算那样有趣。”[24]

三、直觉还是实践:直觉主义数学是胡说

维特根斯坦对布劳威尔在数学基础问题上所持的直觉主义立场应该是比较熟悉的,可以说,布劳威尔的直觉主义数学引起了维特根斯坦重新进行数学基础问题思考的兴趣,但是,维特根斯坦对于布劳威尔的直觉主义总体上持批评态度。[25]布劳威尔在强调时间对于数学的重要性基础之上逐渐发展出一套直觉主义的数学观点。这种直觉主义数学主要强调数学本质上是人的理想化的精神构造活动的产物,数学科学的精确性和可靠性既不在于逻辑主义所讲的逻辑,也不在于形式主义所讲的符号本身,而在于人类的理智直觉之中。

1928 年 3 月,布劳威尔在维也纳做了一场题为“数学、科学与语言”的讲演,系统地阐释了他的直觉主义的数学观点。他认为,个人生存意志的首要模式就是数学的沉思模式,数学的沉思模式产生于“时间的”和“因果的”态度两个阶段。“前者不过是理智的元现象,它可以将生命的一瞬间分裂为两个性质不同的事物,人们感受到一个事物产生另外一个事物,尽管这在人们的记忆行为中被保存下来。……通过时间态度而产生的时间的二(twoness)——或者两个成员的时间的表象序列——能够自身被视为一个新的二的成员之一,由此而产生了时间的三(threeness),如此等等。”[26]布劳威尔将数的诞生看作是人的心灵理智行为创造的结果,时间序列可以通过人类心灵理智的无限次重复,产生出无限多的数。布劳威尔认为“所有二(twoness)的这种普遍的基质就是数学的元直觉(ur - intuition),它的自我展开就引入了作为概念实在的无限,具体说来,首先它产生了自然数的总体,然后是实数总体,最终是整个纯粹数学。”[27]

针对布劳威尔的直觉主义数学思想,维特根斯坦很早就表达了不同的批评意见。早在《逻辑哲学论》时期,维特根斯坦曾经就说:“我们在解决数学问题时是否需要直觉,对这个问题必须回答说,在这里语言提供了必要的直觉。”[28]在前期维特根斯坦看来,数学本质上就是由计算构成的,数学中根本不需要专门的直觉来发挥作用,计算的语言本身就为人提供了所谓的“直觉”。中后期维特根斯坦基本上坚持了这一思想,他认为直觉主义尝试借助于人类心灵中的理性直觉力量来说明数的产生并解释数学公理的做法充满了认识论的混淆。

后期维特根斯坦多次对直觉主义的数学观点提出了批评。他曾对于直觉主义所讲的“基本直觉”这个概念感到很困惑,认为这个概念难以理解。他说:“当直觉主义者们谈论‘基本直觉’(Grundintuition)——这是一个心理学的过程么?它是如何进入数学中来的呢?或者,他们所表示的并不仅仅是一种(弗雷格意义上的)元指号(Urzeichen),一种计算的构成部分?”[29]维特根斯坦认为,直觉主义所谈论的“基本直觉”很可能是一种心理学的过程,数学研究和心理学的研究根本不是一回事。他还说:“我们总是听说,数学家是靠直觉来工作的,但是我们并不能体会

到,这应该是和数学的本质有关的事情。……我总是要说:我检查数学家的活动记录;他们的心灵的过程,快乐、压抑、直觉以及事物,虽然它们在和其他事物的关系上十分重要,但是它们和我无关。”[30]维特根斯坦认为哲学家要做的事情就是要检查数学家的活动记录,特别是对数学家的研究活动进行观察和反思,而并不是要求我们去关心数学家的精神状态,直觉主义者认为可以通过研究人类的心理过程或现象的本质就可以解释数的产生和发展的过程的思路是充满了认识论的混淆的。

直觉主义者寻求的“基本直觉”(Grundintuition)并不能真正地说明数学的本质,数学的本质不仅是句法规则,更是一种语言游戏的实践活动,直觉主义的“基本直觉”只关注人类内心的精神状态的描述,而对人类的数学实践活动本身视而不见,就会造成他们不能够真正地弄清楚数学的语法规则的特点,不能为人类学习数学知识提供有力的解释。维特根斯坦曾举一个小学生学习数列的例子来说明这点。比如我们教一个小孩写一列基数系列,直到教他根据“+n”这种形式的命令写下,0,n,2n,3n,等等的形式系列。于是教他根据“+1”的命令写下基数系列,我们做了练习,在1000以内的数里对学生的理解做了测验。现在我们要求学生根据“+2”一直写到1000以上,而到了1000他写下的是1000,1004,1008,1012。我们看到这个结果后一般会责备他说“你应该加2,怎么在1000以后加4了呢”。如果这个学生回答说,“是啊,这不对吗?我还以为应当这样做呢。”我们该怎么去说明这个孩子的理解状况?或许这个学生的本性就告诉他“加2加到1000,加4到2000,加6到3000”[31]。维特根斯坦举这个例子与我们通常理解的数学规则相悖,小孩根据“直觉”意识,告诉他“加2加到1000,加4到2000,加6到3000”,在这里,小孩实际上是对每一步计算都赋予了直觉的力量,以为可以通过这种直觉来执行大人的命令。这里的错误是如何发生的呢?维特根斯坦强调这里的问题恰恰出在这个小学生的“直觉本性”之中。维特根斯坦对那种希望借助于人类心灵的直觉来说明数学规则的做法持拒斥态度,数学计算中需要的并不是直觉,而是“决定”来保证数学语法的规范性和必然性。

维特根斯坦在接下来说,“那么,你归根到底是说:为了正确地执行‘+n’的命令,每一步都需要新的洞见——直觉。”“说每一步上都需要一种直觉,几乎还不如说在每一步上都需要一个新的决定(Entscheidung)更正确些。”[32]这里所谓的“决定”就是强调在数学中存在极强的语法规则,它可以规范从计算的一开始,“+2”就必须无限进行下去,所以不存在可通过直觉在不同的步骤上随意曲解的可能性。因而,维特根斯坦强调指出,“我们也许会说我们需要的并不是每一步的直觉,而是一个决定。——实际上两者都不存在。你不可能做出一个决定:你仅仅是做了一些事情。它是关于一个特定实践的问题。直觉主义是彻头彻尾的胡说(all bush)。除非它意味一种启示。”[33]数学的规则的判定主要是一种数学实践行为,因为数学规则通过语言游戏而展现,而语言游戏是深深地扎根于我们的生活形式之中。“想象一种语言就是叫做想象一种生活形式(Lebensform)。”“‘语言游戏’(Sprachspiel)这个用语在这里是要强调,用语言来说话是某种行为举止的一部分,或某种生活形式的一部分。”[34]在维特根斯坦看来,在说明数学的语法规则的特点时,我们需要的不是对人类精神状态进行刻画,而应该从数学语言和实践之间关系的角度观察数学实践本身,只有这样才能真正地消除掉一系列关于数学本质的误解。“数学的必然性取决于我们实施计算的方式,是我们训练、约定的结果。而不求助于任何物理的或抽象的实在。数学陈述的真在于使用,即它们在我们生活形式的日常活动之中。”[35]数学的语法规则或游戏的意义就在于使用之中,就在于我们人类每天都必须用数学来解决实际的问题诸多活动之中。人类经过无数次的数学计算实践训练,纠正相应

的错误，达成共识，形成相应的规则和系统，从而使得数学公理与命题成为人类思维中最坚定不可动摇的部分。

综上所述，维特根斯坦认为在数学基础的问题上，流行的三大派观点中都充满了诸多认识论的混淆，这些认识论的观点没有真正地从语法、规则角度来阐明数学命题的本质，也没有从实践角度理解数学活动本身，因而他们的理解都是很成问题的。相反，维特根斯坦要强调我们需要在哲学语法上做到尽力澄清，只有这样才能拨开数学基础问题产生的迷雾，才能促进数学基础问题的研究。“哲学的清楚明白对于数学的发展产生同样的影响，就像阳光对土豆芽的生长产生影响一样。（在黑暗的地窖里，它们生长缓慢）。”〔36〕数学的严格必然性与精确性并不在于逻辑，更不在于人类心灵的精神过程，而在于人类需要数学来完成各种各样的外在行为和实践之中。

注释：

〔1〕〔2〕〔14〕〔29〕〔36〕Wittgenstein，L. Philosophische Grammatik，Herausgegen von Rush Rhees， Werkausgabe Band 4，Berlin：Suhrkamp Verlag，2015，pp. 296—297，297，296，322，381.

〔3〕〔德〕弗雷格：《算术基础》，王路译，王炳文校，北京：商务印书馆，2007 年，第 85 页。

〔4〕〔英〕罗素：《数理哲学导论》，晏成书译，北京：商务印书馆，2005 年，第 19 – 23 页。

〔5〕〔6〕〔7〕〔9〕〔15〕〔16〕〔17〕〔20〕〔23〕〔24〕Wittgenstein，L. Wittgenstein und der Wiener Kreis，Gespräche，aufgezeichnet von Friedrich Waismann，Werkausgabe Band 3，Berlin：SuhrkampVerlag，2015，pp. 222，222，164 – 165，223 – 224，136，119，120，122，149，121.

〔8〕〔25〕 Marion，M. Wittgenstein，Finitism，and The Foundations of Mathematics，Oxford：Clarendon Press，1998，pp. 78，103 – 127.

〔10〕〔13〕 Wittgenstein， L.， Philosophische Bemerkungen，Werkausgabe Band 2，Frankfurt am Main：Suhrkamp Verlag，2015，pp. 125，180.

〔11〕〔美〕斯图亚特·夏皮罗：《数学哲学》，郝兆宽、杨睿之译，上海：复旦大学出版社，2014 年，第 155 页。

〔12〕Hilbert，D. “On The Infinite” in From Frege to GÖdel， A Source Book in Mathematical Logic，1879 – 1931，Jean Van Heijenoort（eds.）Cambridge，Massachusetts：Harvard University Press，1967，p. 367.

〔18〕Shanker，S.，Wittgenstein and the Turning Point in the Philosophy of Mathematics， Albany：Sate University of New York Press，1987.

〔19〕维特根斯坦在其数学哲学中一直批判数学柏拉图主义（platonism），该观点主张数学研究的是外在的客观事实，数学命题的真和假主要依赖于这种事实描述和认识，所以数学命题主要是对于这些数学事实的客观描述。数学柏拉图主义者一般认为数学家的主要工作是发现真理，而不是发明或创造。数学柏拉图主义主要代表有数学家哈代（Hardy）以及哥德尔，而坚持认为数学主要是数学家发明和创造的结果的这种观点的主要代表有维特根斯坦和布劳威尔。关于维特根斯坦对于哈代观点的批评可参见，Wittgenstein， L.，Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics Cambridge，1939， Cora Diamond（eds.），Hassocks， Sussex：The Harvester Press， LTD， 1976，pp. 139 – 140. 关于维特根斯坦和哥德尔之间的争论问题的有趣探讨，参见Wang，H. “To and From Philosophy—Discussions with Gödel and Wittgenstein”，in Synthese，Vol. 88：1991. pp. 229 – 277.

〔21〕Frascolla，P.，Wittgenstein's Philosophy of Mathematics，London and New York：Routledge， 1994，p. 101.

〔22〕Wrigley，M.，“Wittgenstein's Philosophy of Mathematics”，in Philosophical Quarterly， 1977，27（106）：pp. 50 – 59.

〔26〕〔27〕Brouwer， L. E. J.，“Mathematics， Science and Language”，in From Kant to Hilbert， A Source Book in the Foundations of Mathematics，Vol. Ⅱ，William Ewald（ed.）， Oxford：Clarendon Press， 1996，p. 1176，177.

〔28〕 Wittgenstein， L.， Tractatus Logico – Philosophicus，Werkausgabe Band 1，Frankfurt am Main：Suhrkamp Verlag，2014，pp. 77.

〔30〕Wittgenstein，L.，The Big Typescript（TS 213）， German – English Scholars' Edition，edited and translated by Luckhardt ，C. G. and Maximilian A. E. Aue， Oxford：Basil Blackwell，2005，p. 375.

〔31〕〔32〕〔34〕Wittgenstein，L.，Philosophische Untersuchungen. Werkausgabe Band1， Frankfurt am Main：Suhrkamp Verlag，2014，pp. 336 – 337，337，246 – 250.

〔33〕Wittgenstein，L. Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics Cambridge，1939， Cora Diamond（eds.）， Hassocks， Sussex：The Harvester Press， LTD， 1976， p. 237.

〔35〕Garavaso，P.，“Wittgenstein's philosophy of Mathematics，A Reply to Two Objections”，in The Southern Journal of Philosophy，1988，Vol. ⅩⅩⅥ. No. 2.

〔责任编辑：汪家耀〕